

ВОССТАНОВЛЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК МНОГОСЕКЦИОННОЙ АНИЗОТРОПНОЙ ДИАФРАГМЫ В ПРЯМОУГОЛЬНОМ ВОЛНОВОДЕ¹

Аннотация.

Актуальность и цели. С появлением новых видов материалов, таких как композитные, возникла проблема определения электромагнитных характеристик такого рода материалов. Данная задача является актуальной задачей современной электродинамики. Цель исследования – разработать численно-аналитический метод решения обратной задачи для тонкой многосекционной анизотропной диафрагмы.

Материалы и методы. Рассматривается обратная задача восстановления тензоров диэлектрической проницаемости тонкой многосекционной анизотропной диафрагмы. Задача сводится к решению краевой задачи для системы уравнений Максвелла.

Результаты. Получены численно-аналитические приближенные формулы решения обратной задачи. Разработан метод решения такой задачи. Представлены численные результаты для трехсекционной диафрагмы.

Выводы. Полученные численно-аналитические приближенные формулы решения обратной задачи для тонкой многосекционной анизотропной диафрагмы могут быть использованы при определении электромагнитных параметров анизотропных тонких многослойных пластин волноводным методом.

Ключевые слова: анизотропная диафрагма, многослойная пластина, волноводный метод, обратная задача, диагональный тензор диэлектрической проницаемости.

Е. Д. Derevyanchuk, I. A. Rodionova

RECONSTRUCTION OF ELECTROMAGNETIC CHARACTERISTICS OF A MULTISECTIONAL ANISOTROPIC DIAPHRAGM IN A RECTANGULAR WAVEGUIDE

Abstract.

Background. The appearance of new artificial materials, such as composites, has raised a problem of electromagnetic parameters reconstruction for such materials. This is an actual problem of modern electrodynamics. The aim of the study is to develop a numerical-analytical method for solving the inverse problem for a thin anisotropic multi-sectional diaphragm.

Materials and methods. We consider the inverse problem of a permittivity tensor for a thin multisectional anisotropic diaphragm. The problem is reduced to a boundary value problem for Maxwell's equations.

¹ Работа финансово поддержана грантом Президента РФ № МК-3604.2018.1.

© 2018 Деревянчук Е. Д., Родионова И. А. Данная статья доступна по условиям всемирной лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International License (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>), которая дает разрешение на неограниченное использование, копирование на любые носители при условии указания авторства, источника и ссылки на лицензию Creative Commons, а также изменений, если таковые имеются место.

Results. We obtain numerical-analytical approximate formulas of the solution to the inverse problem. Numerical-analytical method is developed for the problem under investigation. Numerical results are presented for the case of three-sectional diaphragm.

Conclusions. The solution of the inverse problem can be used for tensor permittivity reconstruction for a thin anisotropic multisectional slab.

Key words: inverse problem, anisotropic material, waveguide method, permittivity tensor, multisectional diaphragm, slab.

Введение

В последние десятилетия появилось много различных видов искусственных материалов, таких, например, как композитные. Для определения характеристик такого рода материалов применяют методы математического моделирования. Такого рода задачи относятся к классу обратных задач электродинамики. Данная работа является продолжением работ [1–4], посвященных обратным задачам. Под обратными задачами понимаются задачи, в которых по результатам измерений дифрагированной волны определить характеристики образца материала. К таким задачам относятся обратные задачи геофизики, физики атмосферы, задачи томографии в медицине. В частности, к обратным задачам относятся задачи восстановления электромагнитных параметров образца материала.

В данной работе будет рассмотрена обратная задача восстановления диэлектрической проницаемости каждой секции тонкой многосекционной диафрагмы.

Постановка задачи

Рассмотрим прямоугольную декартову систему координат (ПДСК). Пусть в ПДСК задан волновод $P = \{x : 0 < x_1 < a, 0 < x_2 < b, -\infty < x_3 < \infty\}$ с идеально проводящей поверхностью ∂P (рис. 1).

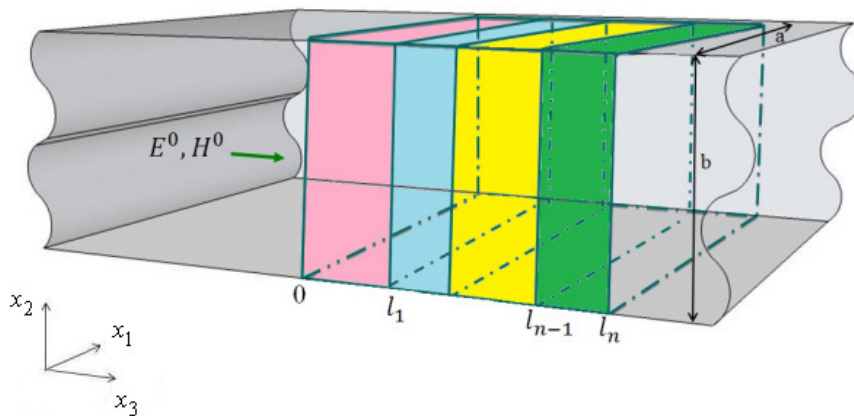


Рис. 1. Диафрагма в волноводе

В волноводе расположена диафрагма Q ($Q \subset P$). В $P \setminus \bar{Q}$ среда изотропна и однородна с проницаемостями $\epsilon_0 = 1$, $\mu_0 = 1$. Диафрагма представляет собой многослойную пластину, каждый слой заполнен анизотроп-

ной средой с неизвестным диагональным тензором диэлектрической проницаемости:

$$\boldsymbol{\epsilon}^{(j)} = \begin{pmatrix} \epsilon_{11}^{(j)} & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{22}^{(j)} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_0 \end{pmatrix}, \quad j=1, \dots, n, \quad (1)$$

и известным тензором магнитной проницаемости:

$$\boldsymbol{\mu}^{(j)} = \begin{pmatrix} \mu_{11}^{(j)} & 0 & 0 \\ 0 & \mu_{22}^{(j)} & 0 \\ 0 & 0 & \mu_{33}^{(j)} \end{pmatrix}, \quad j=1, \dots, n. \quad (2)$$

Известно, что толщина каждой секции $l_j - l_{j-1} \ll 1$, т.е. диафрагма, состоит из «тонких» секций.

Постановка задачи: требуется по известной амплитуде A падающего поля и известным значениям коэффициента прохождения F/A на различных частотах восстановить тензоры диэлектрической проницаемости $\boldsymbol{\epsilon}^{(j)}$, $j=1, \dots, n$, каждой тонкой секции многосекционной диафрагмы, помещенной в прямоугольный волновод.

Метод решения задачи

Поведение электромагнитного поля внутри волновода P удовлетворяет уравнениям Максвелла:

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \mathbf{H} = -i\omega\epsilon_0 \mathbf{E}, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} = i\omega\mu_0 \mathbf{H}, \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \mathbf{H} = -i\omega\boldsymbol{\epsilon}^{(j)} \mathbf{E}, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} = i\omega\boldsymbol{\mu}^{(j)} \mathbf{H}, \end{cases} \quad (4)$$

здесь система (3) описывает поведение электромагнитного поля вне диафрагмы, а система (4) – внутри диафрагмы. Вектор $\mathbf{E}$ – вектор напряженности электрического поля, $\mathbf{H}$ – вектор напряженности магнитного поля, $\omega > 0$ – круговая частота. Предполагается, что волновод работает в одномодовом режиме [5]. Тогда волновое число k_0 ($k_0^2 = \omega^2 \epsilon_0 \mu_0$) удовлетворяет следующему неравенству: $\pi/a < k_0 < \pi/b$, где a – ширина волновода, b – высота волновода. Предполагается, что внешнее электрическое поле имеет вид [5]:

$$\mathbf{E}^0 = A \sin\left(\frac{\pi x_1}{a}\right) e^{-i\gamma_0 x_3} \vec{e}_2,$$

что соответствует волне типа H_{10} с известной амплитудой A , $\gamma_0 = \sqrt{k_0^2 - \pi^2/a^2} = \sqrt{\omega^2 \epsilon_0 \mu_0 - \pi^2/a^2}$, γ_0 – постоянная распространения вол-

ны H_{10} , $\vec{e}_2$ – орт вдоль оси Oy . Вектор $\mathbf{H}^0$ определяется из второго уравнения системы (3).

С учетом того, что волна H_{10} имеет поляризацию $\mathbf{E} = (0 \ E_y \ 0)$, $\mathbf{H} = (H_x \ 0 \ H_z)$, полное поле вне Q имеет вид

$$\mathbf{E} = \begin{cases} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)(Ae^{-i\gamma_0 z} + Be^{i\gamma_0 z})\mathbf{e}_2, & z < 0, \\ \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)Fe^{-i\gamma_0 z}\mathbf{e}_2, & z > l, \end{cases} \quad (5)$$

а внутри диафрагмы поле имеет вид

$$\mathbf{E} = \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\left(C_j e^{-i\gamma_j l_j} + D_j e^{i\gamma_j l_j}\right)\mathbf{e}_2, \quad j = 1, \dots, n, \quad (6)$$

Здесь A – амплитуда падающей волны; B и F – коэффициенты, подлежащие измерению.

Подставляя выражения (1), (2) в системы уравнений Максвелла (3), (4), получим соответствующие выражения для постоянных распространения:

$$\gamma_0 = \sqrt{\omega^2 \epsilon_0 \mu_0 - \frac{\pi^2}{a^2}}, \quad \gamma_j = \sqrt{\left(\omega^2 \epsilon_{22}^j \mu_{33}^j - \frac{\pi^2}{a^2}\right) \frac{\mu_{11}^j}{\mu_{33}^j}}. \quad (7)$$

На границе областей должны выполняться условия сопряжения:

$$[E_y]_L = 0, \quad [H_x]_L = 0, \quad (8)$$

где $L := \{(x, y, z) : z = 0, z = l\}$; $[\cdot]_L$ – скачок предельных значений функции на границе раздела сред L ; E_y, H_x – тангенциальные составляющие векторов $\mathbf{E}, \mathbf{H}$ соответственно.

На основе работ [1–3] для тензоров (1), (2) с учетом выражений (5), (6) и (8) справедливы формулы зависимости коэффициента прохождения F/A от компонент диэлектрических и магнитных тензоров:

$$\frac{F}{A}(\omega_s) = \frac{2e^{-i\gamma_0(\omega_s)l_n} \prod_{j=0}^n \frac{\gamma_j(\omega_s)}{\mu_{11}^{(j)}}}{\frac{\gamma_n(\omega_s)}{\mu_{11}^{(n)}} p_{n+1}^{(+)}(\omega_s) + \frac{\gamma_0}{\mu_0} q_{n+1}^{(+)}(\omega_s)}, \quad s = 1, \dots, 2n, \quad (9)$$

где

$$p_1 = 1, \quad p_{j+1} = \frac{\gamma_{j-1}}{\mu_{11}^{(j-1)}} p_j \cos \alpha_j + \frac{\gamma_j}{\mu_{11}^{(j)}} q_j \sin \alpha_j,$$

$$q_1 = 1, \quad q_{j+1} = \frac{\gamma_{j-1}}{\mu_{11}^{(j-1)}} p_j i \sin \alpha_j + \frac{\gamma_j}{\mu_{11}^{(j)}} q_j \cos \alpha_j, \quad (10)$$

$$\alpha_j = \gamma_j (l_j - l_{j-1}), \quad j = 1, \dots, n.$$

Выражение (9) есть не что иное, как система n комплексных уравнений с n комплексными неизвестными $\varepsilon_{22}^{(j)}(\omega) = \varepsilon_{22}^{\prime(j)}(\omega) + i \sigma_2^{(j)} / \omega$, $j = 1, \dots, n$, или система $2n$ вещественных уравнений с $2n$ действительными неизвестными $\varepsilon_{22}^{\prime(j)}(\omega), \sigma_2^{(j)}$, $j = 1, \dots, n$.

В случае диафрагмы, состоящей из тонких пластин, т.е. $(l_j - l_{j-1}) \ll 1$, и при условии того, что $\gamma_j (l_j - l_{j-1}) \ll 1$, выражения (10) для коэффициентов p_j, q_j имеют вид

$$\begin{aligned} \lim_{l_j - l_{j-1} \rightarrow 0} p_{j+1} &= \lim_{l_j - l_{j-1} \rightarrow 0} \left(\frac{\gamma_{j-1}}{\mu_{11}^{(j-1)}} p_j \cos \alpha_j + \frac{\gamma_j}{\mu_{11}^{(j)}} q_j i \sin \alpha_j \right) = \\ &= \frac{\gamma_{j-1}}{\mu_{11}^{(j-1)}} p_j + \frac{\gamma_j}{\mu_{11}^{(j)}} q_j i \alpha_j; \\ \lim_{l_j - l_{j-1} \rightarrow 0} q_{j+1} &= \lim_{l_j - l_{j-1} \rightarrow 0} \left(\frac{\gamma_{j-1}}{\mu_{11}^{(j-1)}} p_j i \sin \alpha_j + \frac{\gamma_j}{\mu_{11}^{(j)}} q_j \cos \alpha_j \right) = \\ &= \frac{\gamma_{j-1}}{\mu_{11}^{(j-1)}} p_j i \alpha_j + \frac{\gamma_j}{\mu_{11}^{(j)}} q_j, \quad j = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Таким образом, окончательно имеем следующую систему уравнений:

$$\frac{F}{A}(\omega_s) = \frac{2e^{-i\gamma_0(\omega_s)l_n} \prod_{j=0}^n \frac{\gamma_j(\omega_s)}{\mu_{11}^{(j)}}}{\frac{\gamma_n(\omega_s)}{\mu_{11}^{(n)}} p_{n+1}^{(+)}(\omega_s) + \frac{\gamma_0}{\mu_0} q_{n+1}^{(+)}(\omega_s)}, \quad s = 1, \dots, 2n, \quad (11)$$

$$p_1 = 1, \quad p_{j+1} \approx \frac{\gamma_{j-1}}{\mu_{11}^{(j-1)}} p_j + \frac{\gamma_j}{\mu_{11}^{(j)}} q_j i \alpha_j,$$

$$q_1 = 1, \quad q_{j+1} \approx \frac{\gamma_{j-1}}{\mu_{11}^{(j-1)}} p_j i \alpha_j + \frac{\gamma_j}{\mu_{11}^{(j)}} q_j, \quad (12)$$

$$\alpha_j = \gamma_j (l_j - l_{j-1}), \quad j = 1, \dots, n.$$

где постоянные распространения, входящие в уравнения (11)–(12), выражаются по формулам (7).

Для того чтобы определить первые компоненты тензоров на главной диагонали $\epsilon_{11}^{(j)}$, выполним поворот диафрагмы на угол $\varphi = 90^\circ$ относительно оси Oz . В результате поворота тензоры диэлектрической проницаемости преобразуются и примут следующий вид:

$$\bar{\epsilon}^{(j)} = \begin{pmatrix} \epsilon_{22}^{(j)} & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{11}^{(j)} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{33}^{(j)} \end{pmatrix}, \quad \bar{\mu}^{(j)} = \begin{pmatrix} \mu_{22}^{(j)} & 0 & 0 \\ 0 & \mu_{11}^{(j)} & 0 \\ 0 & 0 & \mu_{33}^{(j)} \end{pmatrix}. \quad (13)$$

Тогда уже для новых тензоров (12) система уравнений (11) примет вид

$$\frac{F}{A}(\omega_s) = \frac{2e^{-i\gamma_0(\omega_s)l_n} \prod_{j=0}^n \frac{\bar{\gamma}_j(\omega_s)}{\mu_{11}^{(j)}}}{\frac{\bar{\gamma}_n(\omega_s)}{\mu_{22}^{(n)}} \bar{p}_{n+1}^{(+)}(\omega_s) + \frac{\gamma_0}{\mu_0} \bar{q}_{n+1}^{(+)}(\omega_s)}, \quad s = 1, \dots, 2n, \quad (14)$$

$$p_1 = 1, \quad \bar{p}_{j+1} \approx \frac{\bar{\gamma}_{j-1}}{\mu_{22}^{(j-1)}} \bar{p}_j + \frac{\bar{\gamma}_j}{\mu_{22}^{(j)}} \bar{q}_j i \bar{\alpha}_j, \\ q_1 = 1, \quad \bar{q}_{j+1} \approx \frac{\bar{\gamma}_{j-1}}{\mu_{22}^{(j-1)}} \bar{p}_j i \bar{\alpha}_j + \frac{\bar{\gamma}_j}{\mu_{22}^{(j)}} \bar{q}_j, \quad (15)$$

$$\alpha_j = \gamma_j (l_j - l_{j-1}), \quad j = 1, \dots, n,$$

$$\gamma_j = \sqrt{\left(\omega^2 \epsilon_{11}^j \mu_{33}^j - \frac{\pi^2}{a^2} \right) \frac{\mu_{22}^j}{\mu_{33}^j}}. \quad (16)$$

Численные результаты

В данном разделе представлены численные результаты решения поставленной обратной задачи. Все единицы измерения указаны в системе СГС.

Параметры волновода $a = 2$ см, $b = 1$ см, измерения проводятся на частотах $f_1 = 11,94$ ГГц, $f_2 = 8,12$ ГГц, $f_3 = 9,55$ ГГц, что соответствует $\omega_1 = 75,02$ ГГц, $\omega_2 = 51,02$ ГГц и $\omega_3 = 60,00$ ГГц ($\omega = 2\pi f$), амплитуда падающего поля $A = 1$. В первом столбце табл. 1 указаны значения коэффициента прохождения на каждой частоте, во втором – вычисленные значения диэлектрической проницаемости, в последнем столбце указаны максимальная погрешность вычислений. Толщины секций: $l_1 = 2 \cdot 10^{-4}$, $l_2 - l_1 = 3 \cdot 10^{-4}$, $l_3 - l_2 = 2 \cdot 10^{-4}$ см. Значения тензоров магнитной проницаемости: $\mu^{(1,2,3)} = \text{diag}(1 \quad 1 \quad 1)$. Точные значения тензоров:

$$\boldsymbol{\epsilon}^{(1)} = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 1,3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\epsilon}^{(2)} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1,9 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\epsilon}^{(3)} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Таблица 1

Значения $\frac{F}{A}(\omega_i), i = 1, 2, 3$	Вычисленные значения $\boldsymbol{\epsilon}^{(1)}$ по формуле (12)	max $\Delta, \%$
В исходном положении диафрагмы определяем вторые компоненты на главной диагонали каждой секции диафрагмы $\epsilon_{22}^{(1)}, \epsilon_{22}^{(2)}, \epsilon_{22}^{(3)}$, вычисления проводятся по формулам (11), (12), (7)		
$0,9999 - 0,0015i$ $0,9999 - 0,0021i$ $0,9999 - 0,00150i$	$\epsilon_{22}^{(1,2,3)} = (1,273 \quad 1,893 \quad 4,037)$	2,06
После поворота на угол $\varphi = 90^\circ$ относительно оси Oz определяем первые компоненты на главной диагонали каждой секции диафрагмы $\epsilon_{11}^{(1)}, \epsilon_{11}^{(2)}, \epsilon_{11}^{(3)}$. Вычисления проводятся по формулам (14)–(16)		
$0,99998 - 0,0040i$, $0,99998 - 0,0040i$, $0,99996 - 0,0056i$	$\epsilon_{11}^{(1,2,3)} = (6,946 \quad 4,026 \quad 3,015)$	0,77

Из табл. 1 видно, что приближенные формулы (11)–(12) и (14)–(16) можно применять для толщин порядка микрометра $l \leq 10^{-5}$. Тогда погрешность вычислений не будет превышать 3 %.

Заключение

В данной работе предложены приближенные формулы решения поставленной обратной задачи. Численные результаты показывают эффективность использования приближенных формул для определения тензора диэлектрической проницаемости для толщин диафрагмы меньше 0,2 мкм.

Библиографический список

1. **Деревянчук, Е. Д.** Решение обратной задачи определения тензора магнитной проницаемости диафрагмы в прямоугольном волноводе / Е. Д. Деревянчук // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2013. – № 1 (25). – С. 34–44.
2. **Smirnov, Yu. G.** Reconstruction of permittivity and permeability tensors of anisotropic materials in a rectangular waveguide from the reflection and transmission coefficients at different frequencies / Yu. G. Smirnov, Yu. V. Shestopalov, E. D. Derevyanchuk // Proceedings 128 of Progress in Electromagnetic Research Symposium (PIERS 2013, Stockholm, Sweden, August 12–15). – 2013. – P. 290–295.
3. **Derevyanchuk, E. D.** Tensor permittivity reconstruction of two-sectional diaphragm in a rectangular waveguide / E. D. Derevyanchuk, Yu. G. Smirnov // Proceedings of the International Conference “Days on Diffraction – 2014”. – St. Petersburg, Russia, 2015. – P. 65–68.
4. **Shestopalov, Yu. V.** Inverse problem method for permittivity of an n-sectional diaphragm in a rectangular waveguide / Yu. V. Shestopalov, Yu. G. Smirnov,

- E. D. Derevyanchuk // Proceedings of Progress in Electromagnetic Research Symposium (PIERS 2014, Guangzhou, China, 25–28, 2014). – Guangzhou, 2014. – P. 2610–2613.
5. **Вайнштейн, Л. А.** Электромагнитные волны / Л. А. Вайнштейн. – М. : Радио и связь, 1988.

References

1. Derevyanchuk E. D. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziiko-matematicheskie nauki* [University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences]. 2013, no. 1 (25), pp. 34–44.
2. Smirnov Yu. G., Shestopalov Yu. V., Derevyanchuk E. D. *Proceedings 128 of Progress in Electromagnetic Research Symposium (PIERS 2013, Stockholm, Sweden, August 12–15)*. 2013, pp. 290–295.
3. Derevyanchuk E. D., Smirnov Yu. G. *Proceedings of the International Conference “Days on Diffraction – 2014”*. Saint-Petersburg, Russia, 2015, pp. 65–68.
4. Shestopalov Yu. V., Smirnov Yu. G., Derevyanchuk E. D. *Proceedings of Progress in Electromagnetic Research Symposium (PIERS 2014, Guangzhou, China, 25–28, 2014)*. Guangzhou, 2014, pp. 2610–2613.
5. Vaynshteyn L. A. *Elektromagnitnye volny* [Electromagnetic waves]. Moscow: Radio i svyaz', 1988.

Деревянчук Екатерина Дмитриевна
кандидат физико-математических наук,
научный сотрудник, научно-исследовательский центр
«Суперкомпьютерное моделирование
в электродинамике», Пензенский
государственный университет (Россия,
г. Пенза, ул. Красная, 40)

E-mail: katyader11@yandex.ru

Derevyanchuk Ekaterina Dmitrievna
Candidate of physical and mathematical
sciences, researcher, the research center
“Supercomputer modeling
in electrodynamics”, Penza State
University (40 Krasnaya street,
Penza, Russia)

Родионова Ирина Анатольевна
кандидат физико-математических наук,
доцент, кафедра математики
и суперкомпьютерного моделирования,
Пензенский государственный
университет (Россия, г. Пенза,
ул. Красная, 40)

E-mail: RodionovaIrena@yandex.ru

Rodionova Irina Anatol'evna
Candidate of physical and mathematical
sciences, associate professor,
sub-department of mathematics
and supercomputer modeling, Penza
State University (40 Krasnaya street,
Penza, Russia)

УДК 517.3

Деревянчук, Е. Д.

Восстановление электромагнитных характеристик многосекционной анизотропной диафрагмы в прямоугольном волноводе / Е. Д. Деревянчук, И. А. Родионова // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2018. – № 2 (46). – С. 56–63. DOI 10.21685/2072-3040-2018-2-6.